

**Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej I.2,
31 sierpnia 2015 r.**

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

1. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} (\operatorname{arctg} \sqrt{n+1} - \operatorname{arctg} \sqrt{n}).$$

2. Znaleźć kres dolny objętości stożków opisanych na kuli o zadanym promieniu r .

3. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona oraz klasy C^1 na przedziale $[0, \infty)$.

4. Czy całka niewłaściwa

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(2x+5)}{x^2} dx$$

jest zbieżna? Jeśli tak, obliczyć ją.

5. Funkcja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia warunek $f(0) = 3$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{1/n}^{2/n} \frac{f(x)}{x} dx.$$

6. Zbadać, czy ciąg funkcji $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, zadany wzorem

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(1 + \exp(nx)),$$

jest zbieżny jednostajnie na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.